Análisis Funcional
Examen XV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Funcional
Examen XV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Daniel Morán Sánchez

Granada, 2026

Asignatura Análisis Funcional.

Curso Académico 2024-25.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor David Arcoya Álvarez.

Descripción Examen Extraordinario.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Enunciado y demostración del **teorema de la aplicación abierta**.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.**

1. **[1 punto]** Sea E un espacio vectorial y $B : E \times E \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, simétrica
$$B(x,y) = B(y,x), \qquad \forall x,y \in E,$$
y semidefinida positiva
$$B(x,x) \geq 0, \qquad \forall x \in E.$$
Prueba la desigualdad de Cauchy–Schwarz:
$$|B(x,y)| \leq B(x,x)^{1/2} B(y,y)^{1/2}, \qquad \forall x,y \in E.$$

2. **[2 puntos]** Sea E un espacio de Banach y $T : E \to E^*$ una aplicación lineal verificando
$$\langle Tx, x\rangle_{E^*,E} \geq 0, \qquad \forall x \in E.$$
Prueba que T es acotado.

3. **[2 puntos]** Sea H un espacio de Hilbert con su producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y sea $T : H \to H$ una aplicación lineal biyectiva verificando
$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \qquad \forall x,y \in H.$$
Prueba que
$$[x,y] := \langle Tx, y\rangle, \qquad \forall x,y \in H,$$
define un producto escalar equivalente en H.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sea $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, no constantemente cero, con soporte compacto contenido en $(0,1)$ y con
$$\Phi(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$
Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos
$$f_n(x) := \Phi(x+n), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. **[1 punto]** Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a cero en compactos de $\mathbb{R}$ y que para cada $p \in [1,\infty)$ la norma $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})}$ es una constante estrictamente positiva independiente de $n \in \mathbb{N}$.

2. **[2 puntos]** Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ converge a cero $*$–débilmente en $L^\infty(\mathbb{R})$, es decir, en la topología $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$.

Ejercicio 1 (2 puntos)**.** Enunciado y demostración del teorema de la aplicación abierta.

Consultar los apuntes de teoría.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.**

1. [**1 punto**] Sea E un espacio vectorial y $B : E \times E \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, simétrica
$$B(x,y) = B(y,x), \qquad \forall x, y \in E,$$
y semidefinida positiva
$$B(x,x) \geq 0, \qquad \forall x \in E.$$
Prueba la desigualdad de Cauchy–Schwarz:
$$|B(x,y)| \leq B(x,x)^{1/2} B(y,y)^{1/2}, \qquad \forall x, y \in E.$$
Sean $x, y \in E$ arbitrarios. Como B es bilineal y simétrica, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene
$$0 \leq B(ty + x, ty + x) = t^2 B(y,y) + 2tB(x,y) + B(x,x).$$
El polinomio cuadrático en la variable t
$$p(t) = t^2 B(y,y) + 2tB(x,y) + B(x,x)$$
es no negativo para todo $t \in \mathbb{R}$, luego su discriminante es menor o igual que cero:
$$\Delta = 4B(x,y)^2 - 4B(x,x)B(y,y) \leq 0.$$
Por tanto,
$$B(x,y)^2 \leq B(x,x)B(y,y),$$
y tomando raíces cuadradas obtenemos
$$|B(x,y)| \leq B(x,x)^{1/2} B(y,y)^{1/2}, \qquad \forall x, y \in E,$$
lo que concluye la demostración.

2. [**2 puntos**] Sea E un espacio de Banach y $T : E \to E^*$ una aplicación lineal verificando
$$\langle Tx, x \rangle_{E^*,E} \geq 0, \qquad \forall x \in E.$$
Prueba que T es acotado.

Primero, usando la positividad de T, observamos que para todo $x, y \in E$ se tiene
$$\langle T(x-y), x-y \rangle \geq 0,$$
es decir,
$$\langle Tx, x \rangle - \langle Tx, y \rangle - \langle Ty, x \rangle + \langle Ty, y \rangle \geq 0. \tag{1}$$
Demostrar T acotado equivale a demostrar T continua, usaremos el teorema de la gráfica cerrada, para ello demostraremos que

"toda sucesión $\{x_n\} \subset E$ verificando $\left\{ \begin{array}{l} \{x_n\} \overset{(E,\|\cdot\|_E)}{\longrightarrow} x \\ \{Tx_n\} \overset{(E^*,\|\cdot\|_{E^*})}{\longrightarrow} f \end{array} \right.$ cumple $Tx = f$"

Sea pues $\{x_n\} \overset{\|\cdot\|_E}{\longrightarrow} x$ y $\{Tx_n\} \overset{\|\cdot\|_{E^*}}{\longrightarrow} f$. Por (1), para todo $y \in E$ se tiene

$$\langle Tx_n, x_n\rangle - \langle Ty, x_n\rangle - \langle Tx_n, y\rangle + \langle Ty, y\rangle = \langle Tx_n - Ty,\, x_n - y\rangle \geq 0.$$

Pasando al límite cuando $n \to \infty$ (usando la continuidad del producto dual), obtenemos

$$\langle f, x\rangle - \langle Ty, x\rangle - \langle f, y\rangle + \langle Ty, y\rangle \geq 0, \qquad \forall y \in E.$$

Consecuentemente,

$$\langle f - Ty,\, x - y\rangle \geq 0, \qquad \forall y \in E.$$

Tomando ahora $y = x + az$, con $a \in \mathbb{R}$ y $z \in E$, se obtiene

$$\langle f - T(x + az),\, x - (x + az)\rangle \geq 0,$$

esto es,

$$a\langle f - Tx, z\rangle \leq a^2\langle Tz, z\rangle, \qquad \forall z \in E,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

Dividiendo por a y haciendo tender $a \to 0^+$ y $a \to 0^-$, se deduce

$$\begin{cases} \langle f - Tx,\, z\rangle \leq \lim\limits_{a \to 0^+} a\,\langle Tz, z\rangle = 0, \\ \langle f - Tx,\, z\rangle \geq \lim\limits_{a \to 0^-} a\,\langle Tz, z\rangle = 0, \end{cases}$$

y por tanto

$$\langle f - Tx,\, z\rangle = 0, \qquad \forall z \in E.$$

Por tanto,

$$f = Tx.$$

Hemos probado que el grafo de T es cerrado. Como E es Banach y E^* también lo es, por el **Teorema de la Gráfica Cerrada**, se concluye que T es continuo, es decir, T es acotado.

3. **[2 puntos]** Sea H un espacio de Hilbert con su producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea $T : H \to H$ una aplicación lineal biyectiva verificando

$$\langle Tx, x\rangle \geq 0, \qquad \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \qquad \forall x, y \in H.$$

Prueba que

$$[x, y] := \langle Tx, y\rangle, \qquad \forall x, y \in H,$$

define un producto escalar equivalente en H.

Es fácil comprobar que $[\cdot,\cdot]$ es bilineal. También es simétrica, pues

$$[x,y]=\langle Tx,y\rangle=\langle x,Ty\rangle=\langle Ty,x\rangle=[y,x].$$

Además,

$$[x,x]=\langle Tx,x\rangle\geq 0.$$

Por tanto, por el apartado a) se cumple la desigualdad de Cauchy–Schwarz:

$$|[x,y]|\leq [x,x]^{1/2}[y,y]^{1/2},\qquad \forall x,y\in H.$$

Recordando el isomorfismo de Riesz

$$H\longrightarrow H^*,\qquad x\longmapsto \langle x,\cdot\rangle,$$

y que

$$\langle\!\langle \langle x,\cdot\rangle, y\rangle\!\rangle_{H^*,H}=\langle x,y\rangle,\qquad \forall x,y\in H,$$

podemos usar el apartado b) para ver que la aplicación lineal

$$H\longrightarrow H^*,\qquad x\longmapsto \langle Tx,\cdot\rangle$$

es acotada, lo que equivale a que

$$\|Tx\|\leq K\|x\|,\qquad \forall x\in H.$$

Por el 1er corolario del teorema de la aplicación abierta, al ser T biyectiva, se deduce también que T^{-1} es continua.

La comprobación de que $[x,x]=0\iff x=0$ la veremos mas adelante

Sea $\|\cdot\|$ la norma asociada al producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y definimos

$|x|:=[x,x]^{1/2}$ (será la norma asociada al producto escalar $[\cdot,\cdot]$)

Por la desigualdad de Cauchy–Schwarz para $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

$$|x|^2=[x,x]=\langle Tx,x\rangle\leq \|Tx\|\,\|x\|\overset{T\text{ acotada}}{\leq} K\|x\|^2,$$

luego

$$|x|\leq\sqrt{K}\,\|x\|,\qquad \forall x\in H.$$

Para la desigualdad recíproca, usando de nuevo Cauchy–Schwarz para $[\cdot,\cdot]$:

$$\|x\|^2=\langle x,x\rangle=[T^{-1}x,x]\leq \|T^{-1}x\|\,|x|\overset{T^{-1}\text{ continua}}{\leq}\sqrt{K}\,\|T^{-1}\|\,\|x\|\,|x|.$$

Por tanto

$$\|x\|\leq\sqrt{K}\,\|T^{-1}\|\,|x|.$$

Juntando ambas desigualdades:

$$|x|\leq\sqrt{K}\ \|x\|\leq\sqrt{K}\cdot(\sqrt{K}\|T^{-1}\|\|x|)=K\,\|T^{-1}\|\,|x|\qquad\forall x\in H.$$

De aquí se deduce:

1. $[x,x]=0 \iff |x|=0 \iff x=0$, luego $[\cdot,\cdot]$ es un producto escalar y $|\cdot|$ es la norma asociada al producto escalar.

2. Las normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ son equivalentes.

Ejercicio 3 (4 puntos)**.** Sea $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua, no constantemente cero, con soporte compacto contenido en $(0,1)$ y con

$$\Phi(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos

$$f_n(x):=\Phi(x+n), \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

1. **[1 punto]** Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a cero en compactos de $\mathbb{R}$ y que para cada $p\in[1,\infty)$ la norma $\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})}$ es una constante estrictamente positiva independiente de $n\in\mathbb{N}$.

2. **[2 puntos]** Prueba que la sucesión $\{f_n\}$ converge a cero $*$–débilmente en $L^\infty(\mathbb{R})$, es decir, en la topología $\sigma(L^\infty(\mathbb{R}),L^1(\mathbb{R}))$.

1. **Convergencia en compactos y norma L^p.** Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Por ser acotado, existirá $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

   $$x\geq -n_0, \qquad \forall x\in K.$$

   Así,
   $$n+x\geq n-n_0\geq 1, \qquad \forall n\geq n_0+1.$$

   Como el soporte de Φ está contenido en $(0,1)$, se tiene

   $$f_n(x)=\Phi(n+x)=0\longrightarrow 0, \qquad \forall x\in K, \quad \forall n\geq n_0+1.$$

   Por tanto, $f_n\to 0$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}$.

   Por otra parte, usando nuevamente que el soporte de Φ está contenido en $(0,1)$, para todo $p\in[1,\infty)$ se tiene

   $$\|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})}^p=\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(x)|^p\,dx \overset{\Phi\geq 0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(n+x)^p\,dx. \overset{y=n+x}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(y)^p\,dy=\int_0^1\Phi(y)^p\,dy,$$

   que es una constante independiente de $n\in\mathbb{N}$ y estrictamente positiva porque Φ no es idénticamente nula.

2. **Convergencia $*$–débil.**

   Opción 1. Queremos ver que $\langle f_n,g\rangle\to 0$ para toda $g\in L^1(\mathbb{R})$. Sea $g\in L^1(\mathbb{R})$. Dado $\varepsilon>0$, existe una función continua con soporte compacto $\psi\in C_c(\mathbb{R})$ tal que $\|g-\psi\|_{L^1}<\varepsilon$ (Porque $C_c^\infty(\mathbb{R})\subset C_c(\mathbb{R})$ es denso en $L^1(\mathbb{R})$, entonces $C_c(\mathbb{R})$ es denso en $L^1(\mathbb{R})$.). Entonces:

   $$|\langle f_n,g\rangle|\leq|\langle f_n,g-\psi\rangle|+|\langle f_n,\psi\rangle|\leq\|f_n\|_{L^\infty}\|g-\psi\|_{L^1}+|\langle f_n,\psi\rangle|.$$

Como $\|f_n\|_{L^\infty} = \|\Phi\|_{L^\infty}$ está acotada y $\|g - \psi\|_{L^1} < \varepsilon$, el primer término es pequeño.

Para el segundo, sea K ψ el soporte de ψ, por el apartado (a) sabemos que $f_n \to 0$ uniformemente en K, luego

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f_n \psi| \right| = \left| \int_K f_n \psi \right| \leq \sup_{x \in K} |f_n(x)| \int_K |\psi(x)|\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Esto prueba que $f_n \xrightarrow{w^*} 0$.

Opción 2. Sea $h \in L^1(\mathbb{R})$. Entonces

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)h(x)\, dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(n+x)h(x)\, dx \right| = (1)$$

Como el soporte de Φ está contenido en $(0,1)$,

$$\Phi(n+x) \neq 0 \Longrightarrow n + x \in (0,1) \Longrightarrow x \in (-n, -n+1).$$

Por tanto,

$$(1) = \left| \int_{-n}^{-n+1} \Phi(n+x)h(x)\, dx \right| \leq \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-n}^{-n+1} |h(x)|\, dx.$$

Es decir, notando I a la funcion indicadora

$$(1) \leq \|\Phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{(-n,-n+1)}(x)|h(x)|\, dx.$$

Observamos que

$$I_{(-n,-n+1)}(x)|h(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

y además

$$|I_{(-n,-n+1)}(x)h(x)| \leq |h(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{(-n,-n+1)}(x)h(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)h(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

lo que prueba que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ en $L^\infty(\mathbb{R})$.